論文の内容の要旨

論文題目：

On the C^1 stabilization of homoclinic tangencies
for diffeomorphisms in dimension three

（３次元の微分同相写像に対するホモクリニック接触の C^1 安定化について）

氏　名：　李曉龍

この論文では、３次元閉多様体上の C^1 微分同相写像のホモクリニック接触を考える。主定理は固定した摂動の範囲に対して、双曲的周期的サドルに関するホモクリニック接触を安定化できるための十分条件を与えるものである。特に、双曲的サドルが実数でない固有値を持つとき、これまでの結果より弱い条件の下でホモクリニック類の中に弱固有値を持つ双曲的周期的サドルつくり、しかもその種類を指定できるという特長がある。そのひとつの応用として、残留的に強健なエントロピー拡大ホモクリニック類の指数に適合した優越分解の存在を示した。

閉多様体上の微分同相写像の研究では、既知の事実として、ホモクリニック接触と異次元ヘテロクリニック・サイクルは、非双曲力学系の典型的な特徴である。この二つの分岐現象が、一様双曲性を持つ微分同相写像の補集合で稠密であるというのは、Palis の有名な予想である。この予想の研究に向けて、分岐を安定化する摂動の方法が求められる。しかし、ホモクリニック接触または異次元ヘテロクリニック・サイクルでは、非横断的交点が含まれるので、それ自身が消えやすい現象である。そのため、ホモクリニック接触と異次元ヘテロクリニック・サイクルは、それぞれの強健的なバージョンを考える必要がある。すると、以下の問題が自然に出てくる：双曲的周期サドルに関するホモクリニック接触（異次元ヘテロクリニック・サイクル）があるとき、いくらでも小さい摂動により、双曲集合に関する強健なホモクリニック接触（あるいは、強健な異次元ヘテロクリニック・サイクル）が作れるか？これはホモクリニック接触（あるいは、異次元ヘテロクリニック・サイクル）の安定化問題と呼ばれる。注意点として、この双曲集合は、元のサドルの接続を含むかどうかによって、弱い安定化と強い安定化の二つの種類がある。

C^1 位相での異次元ヘテロクリニック・サイクルの安定化については、[BD1][BDK] により完全に解決したが、その一方で、最近の Moreira の結果 [Mo] により、ホモクリニック接触の安定化は、多様体が３次元以上の場合のみ意味がある。高次元の場合は、Bonatti と Díaz の folding manifolds の構造 [BD3] に基づいて、本論文の主定理が得られる：(p の Lyapunov 指数を $\chi_1(p) \le \chi_2(p) \le \chi_3(p)$ と表す。そして $\max\{\|Df^{\beta}(x)\| : \beta = \pm 1,\ x \in \mathrm{orb}(p)\}$ を $\|Df^{\pm}(p)\|$ と書く）

定理 A　実数 $a > 1$ に対して、$\delta_0(a) \to 0(a \to 1)$ を満たす $\delta_0(a) > 0$ が存在して、任意の $0 < \delta < \delta_0(a)$ に対し、$f \in \mathrm{Diff}^1(M^3)$ は実数でない縮小的固有値を持つ指数 2 の双曲的周期サドル p に関するホモクリニック接触を示し、$\chi_2(p) + \chi_3(p) > \log(1-\delta)$ を満たすと仮定する。このとき、f との距離が $a\delta\|Df^{\pm}(p)\|$ より小さい $g \in \mathrm{Diff}^1(M^3)$ が存在して、g は強健なホモクリニック接触と強健な異次元ヘテロクリニック・サイクルを同時に持つ。

ここで、注意点として Bonatti、Crovisier、Díaz、Gourmelon の結果 [BCDG] に言及するべきである。固定した摂動の範囲に対して、彼らが [BCDG] で提供した十分条件 $\chi_2(p) + \chi_3(p) > -\delta$ に比べて、定理 A では弱い条件 $\chi_2(p) + \chi_3(p) > \log(1-\delta)$ の下で、ホモクリニック接触の安定化を実現できる。

定理 A の系として、もっと強い条件を仮定すると、ホモクリニック接触の強い安定化を実現できる：

系 B　実数 $a > 1$ に対して、$f \in \mathrm{Diff}^1(M^3)$ と f のホモクリニック接触を持つ双曲的周期サドル p が以下の条件を満たすと仮定する：

- f のある近傍 $\mathcal{U}_f$ 内のすべての g に対し、$H(p_g)$ が指数に適合する優越分解を持たない；かつ
- p は実数でない縮小的固有値を持ち、$\chi_2(p) + \chi_3(p) > \log(1-\delta)$ である。

ここで、$0 < \delta < \delta_0(a)$ は $\mathcal{U}_f$ にも依存して十分小さい。このとき、f との距離が $a\delta\|Df^{\pm}(p)\|$ より小さい g が存在し、g は強健な異次元ヘテロクリニック・サイクルと強健なホモクリニック接触を同時に持つ。さらに、その強健なホモクリニック接触に対する双曲集合は p の g に対する接続を含む。

実は、定理 A の証明の主要な部分は、ホモクリニック類における弱固有値を作ることである。定義として、任意の $\epsilon > 0$ に対して、p とホモクリニック的に関係する q が存在し、$|\lambda^s(q)| > (1-\epsilon)^{\pi(q)}$ あるいは $|\lambda^u(q)| < (1+\epsilon)^{\pi(q)}$ であるとき、p のホモクリニック類 $H(p)$ は弱固有値を持つという。p とホモクリニック的に関係する周期点 q の集合を $\pitchfork(p)$ と表す。M 上の通有的な微分同相写像に対して、指数に適合した優越分解が存在しなければ、弱固有値を持つことが証明できる。ここで、注意点として、一般にはこの弱固有値の種類（縮小的あるいは拡大的）を指定することは重要であるが難しい。例えば、M の次元が 3、p の指数が 2 の場合、$H(p)$ の中で指数 1 の周期点を構成したいとき、最初のステップとして縮小的な弱固有値が必要である。その一方で、もし弱固有値が拡大的なものしかなければ、C^1 摂動を通じて、沈点しか得られない。するとこの沈点は当然ながら属していたホモクリニック類から逃げる。この観察によって、ある場合には弱固有値の種類を指定することが重要である。2012 年 Bochi と Bonatti は Lyapunov 指数を混合する方法を作った [BB]。簡単に言うと、二つの隣り合う Lyapunov 指数を同時にそれらの中点に移動させる。それと Gourmelon の isotopic Franks Lemma により、ホモクリニック類 $H(p)$ の内部で、δ 弱縮小的固有値を得るためには、$\chi_2(p) + \chi_3(p) > -\delta$ の条件が必要である。この論文では、別の摂動方法により、δ 弱縮小固有値を得るための新しい十分条件を与える：

定理 C　任意の $\delta > 0$ に対して、p は $f \in \mathrm{Diff}^1(M)$ の双曲的周期サドルで、以下の二つの条件を満たすと仮定する：

- p は実数でない縮小的固有値を持ち、かつ $\chi_2(p)+\chi_3(p)>\log(1-\delta)$；
- f が p に関するホモクリニック接触を持つ。

このとき、f に C^1 位相でいくらでも近い g が存在して、g は δ 弱縮小的固有値を持つ周期点 $q\in \pitchfork(p_g)$ を持つ。

この定理の証明に本文の多くの部分を費やす。定理 C において、δ 弱縮小的固有値を得るために必要な不等式は、[BCDG] にある [BB] から来る不等式よりも弱い。実際に、[BB] の Lyapunov 指数を混合する方法は、多様体の次元に対する帰納法を通して証明され、本質的には２次元の力学系に帰着するものである。ある周期軌道の中で、小さい角度 θ を持つ点がひとつあれば、高々θ の回転による摂動を通して、２つの Lyapunov 指数をそれらの中点に混合できる。ところが、このような周期軌道上の１点における摂動は大きな周期を持つ周期軌道に沿った接ベクトルの指数的増大率に影響を持つことはできない。一方、定理 C の証明では、周期軌道の周期に比例する個数を持つの部分集合に対する摂動が必要である。結果として、この摂動は軌道に沿った指数的増大率に影響与えることができ、これまでの不等式より弱い不等式を満たす周期的サドルに関するホモクリニック類の中で δ 弱縮小的固有値が得られる。[BB] の方法と違い、より幾何学的な方法をとる。もう少し詳しく言うと、$\pitchfork(p)$ の中の行列 q_k に対し、$\angle(E^s,E^u)$ が、E^s 上の縮小率に比べて、もっと速く 0 に収束するとき、縮小的な弱固有値が得られる。ここでは Isotopic Franks Lemma ([G1]) を適用するために、もとの first return map の微分と弱固有値を持っている行列をつなぐ連続的な摂動を探すべきである。一般に、このような摂動の連続曲線 C_t を見つけるのは難しくないが、一方で曲線に沿って双曲性をずっと保つことは困難である。この障害を回避するための対策として、新たな摂動の曲線 D_t を作って、最初の first return map の微分の不安定方向を回復するという操作を行う。この摂動は、E^s と E^u の間の小さい角度だけではなく、E^s 自身の力学系を利用している。それには、$\dim E^s>1$ がその前提として必要である。この目的を実現するために、D_t が以下の二つの条件を満たすことが必要である：

(a) D_t が $Dg^n(q)$ の不安定固有ベクトル v^u を回復すること；

(b) D_t が $Dg^n(q)\circ C_t$ の弱安定固有ベクトル v^s を保つこと。

もし v^s が v^u の移動している平面 G に近いならば、摂動のサイズが大きくなる。これを避けるために v^s と G の角度はできるだけ大きくとって、過程 (a) と (b) を出来るだけ独立に行わせる。

最後に、ひとつの応用として、筆者が修士論文で導入した残留的に強健なエントロピー拡大ホモクリニック類の研究 [L] に続く結果が得られる。それはある条件下での指数に適合する優越分解の存在である。

定理 D　$f|H(p)$ は、$f\in \mathrm{Diff}^1(M^3)$ を中心とする半径 ρ の開球の中で、残留的に強健なエントロピー拡大ホモクリニック類であるとし、$\sigma=\dfrac{\rho}{\rho+\|Df^{\pm}(p)\|}$ とする。もし p が実数でない縮小的固有値を持ち、かつ $\chi_2(p)+\chi_3(p)>\log(1-\sigma)$ を満たすならば、$H(p)$ は指数に適合する優越分解を持つ。

参考文献

[BB] J. Bochi, C. Bonatti *Perturbation on the Lyapunov spectra of periodic orbits*, Proc. Lond. Math. Soc. (3)**105** (2012), 1-48.

[BCDG] C. Bonatti, S. Crovisier, L. J. Díaz, N. Gourmelon *Internal perturbations of homoclinic classes: non-domination, cycles, and self-replication*, Ergod. Th. & Dynam. Sys. **33** (2013), 739-776.

[BD1] C. Bonatti, L. J. Díaz *Robust heterodimensional cycles and C^1-generic dynamics*, J. Inst. Math. Jussieu **73** (2008), 469-525.

[BD3] C. Bonatti, L. Díaz *Abundance of C^1 robust homoclinic tangencies*, Tran. Amer. Math. Soc. **364** (2012), 5111-5148.

[BDK] C. Bonatti, L. J. Díaz, S. Kiriki *Stabilization of heterodimensional cycles*, Nonlinearity **25** (2012), 930-960.

[G1] N. Gourmelon *A Franks' Lemma that preserves invariant manifolds*, arXiv: 0912.1121 (2009).

[L] X. Li *On R-robustly entropy-expansive diffeomorphisms*, Bull. Braz. Math. Soc. **43** (2012), 73-98.

[Mo] C. G. Moreira *There are no C^1-stable intersections of regular Cantor sets*, Acta. Math. & Dynam. Sys. **206** (2011), 311-323.